

# A ANÁLISE DE ERROS: UMA PERSPECTIVA COGNITIVA PARA COMPREENDER O PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Leny Rodrigues Martins TEIXEIRA<sup>1</sup>

**RESUMO:** O objetivo do presente artigo é analisar, com base no referencial da Psicologia Cognitiva, o papel do erro no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Mediante a descrição de algumas características dos alunos com dificuldades para aprender, procura-se interpretar tais dificuldades. Diferentes abordagens do erro são apontadas, bem como sugestões que favoreçam uma adequada apropriação dos conceitos científicos pelos alunos.

**PALAVRAS CHAVE:** Aprendizagem; Matemática; Psicologia Cognitiva; Erro.

## I - PSICOLOGIA COGNITIVA x APRENDIZAGEM

A Psicologia Cognitiva tem como objeto de estudo, o comportamento humano complexo.

A aquisição das nossas competências complexas, como o conhecimento, só é possível através de um processo de aprendizagem que se dá ao longo do tempo.

Piaget (1964) chamou atenção para o fato de que, para compreender o processo de construção do conhecimento, é preciso analisar o desenvolvimento das estruturas lógicas gerais, donde sua proposta de epistemologia genética.

Vergnaud (1985) acrescenta que, para entender o conhecimento, é preciso levar em conta a organização dos conhecimentos que o sujeito cognoscente realiza nas situações concretas. Compreender a construção do conhecimento depende não só de observar o processo, como também de transformá-lo. Daí sua tese de que a pesquisa em didática é fundamental para que possamos entender as aprendizagens cognitivas complexas.

Nesse sentido, o autor coloca para a psicologia uma dupla preocupação:

- *levar em conta os saberes sociais constituídos (científicos, técnicos, culturais e práticos);*

- *analisar, ao mesmo tempo, a formação e o funcionamento dos conhecimentos dos sujeitos individuais.*

A partir dessa ótica, a Psicologia inaugura uma outra abordagem que pretende

superar, quer o modelo geral de análise estrutural do conhecimento, quer o modelo descritivo da aprendizagem. Em outras palavras, a Psicologia Cognitiva, no sentido proposto por Vergnaud, pretende ter como objeto de estudo a correspondência (que se dá na escola) entre o conhecimento do sujeito e os saberes historicamente construídos. Como afirma Brun (1994, p.72) "*nós estamos colocados frente à questão central da correspondência entre os conhecimentos efetivos dos sujeitos e o saber construído historicamente, devendo esta correspondência se operar no seio dos sistemas didáticos na instituição escolar*".

Esse enfoque marca, ao mesmo tempo, dois aspectos: uma diferença em relação ao ponto de vista estritamente piagetiano (na medida em que leva em conta os saberes constituídos) firmando-se como uma psicologia dos conceitos; e uma preocupação com a organização dos conhecimentos subjacentes dos sujeitos individuais, que não se reduz aos saberes individuais, mas regula as atividades do sujeito que conhece nas diferentes situações.

Nessa perspectiva, privilegia-se o processo de construção de conceitos, tal como se dá na escola, levando-se em conta as dificuldades reais vividas pelos alunos ou impostas pelos próprios conteúdos, bem como suas relações com o processo didático de abordagem do conceito.

## II - CARACTERÍSTICAS DOS ALUNOS COM DIFICULDADE

É sabido que os maiores índices de reprovação escolar se concentram na Matemática. Essa é, de longe, a disciplina que inspira mais

<sup>1</sup> Departamento de Educação Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP - 19060-900 - Presidente Prudente - Estado de São Paulo - Brasil

medo e aversão nos alunos, provavelmente porque as dificuldades para aprendizagem dos conteúdos matemáticos sejam mais evidentes.

No geral, os professores reclamam que os alunos com dificuldade não são capazes de resolver problemas que lhe são propostos, apesar de terem recebido os mesmos conhecimentos que aqueles que aprendem, tais como: conceitos, teoremas, modelos, acompanhados de ilustração ou exemplos e exercícios. Muitas vezes são incapazes de resolver sozinhos, mesmo os problemas isomorfos.

Segundo Cauzinille-Marmèche & Weil-Barais (1989), os professores consideram que a causa dos erros cometidos pelos alunos se deve à falta de conhecimento para a qual preconizam a terapia clássica de repetição da explicação e dos exercícios. O resultado, via de regra, é ineficaz. Em consequência, os professores muitas vezes se tornam descrentes quanto à possibilidade de aprendizagem destes alunos e passam a vê-los como preguiçosos e apáticos, ou como limitados e incapazes de lidar com coisas complexas.

O que realmente acontece com esses alunos?

Para as autoras, o aluno, mesmo em dificuldade, tem conhecimentos no domínio conceitual considerado, embora apresente algumas características que têm sido apontadas em vários tipos de trabalho, tais como:

1) O aluno sabe tratar corretamente certas situações particulares, mas fracassa em situações próximas, a partir do momento em que certas características na aparência são modificadas. Parece que as regras de ação que a criança domina são limitadas a certos tipos de casos. Seus conhecimentos são, portanto, muito contextualizados.

Ex.: equações de 1º Grau semelhantes foram resolvidas corretamente por 26 sujeitos, com diferentes proporções (Cortes, 1995)

$2(x-5) - 3(-x+2) = 5(2x-7)$  --- 17 alunos resolveram

$2(x-3) = 3(x-1) - x - 3$  --- 07 alunos resolveram

2) Os procedimentos e estratégias são, no geral, instáveis.

O aluno pode tomar um caminho correto, depois abandoná-lo, ou aplicar um mesmo procedimento ora corretamente, ora incorretamente.

Ex.:

$$x + x + 6 = 30$$

$$2x = 24$$

$$2x + 6 = 30 \quad x = 2 + 24$$

$$2x = 30 - 6 \quad x = 26$$

$$x = \frac{24}{2}$$

$$x = 12$$

$$x = 12$$

3) O aluno não sabe estimar se os resultados obtidos são plausíveis.

No geral, não sabe reparar ou interpretar as contradições produzidas por seu raciocínio. Ele pode fazer hipóteses contraditórias sobre o mesmo fato e chegar a dois resultados distintos no mesmo exercício

Ex.:  $x + 7 = 5 \quad x = 5 + 7$

$$x = 12$$

$$12 + 7 = 5 ?$$

4) O aluno dispõe de conhecimentos declarativos (teoremas, fórmulas), mas não sabe nem quando, nem como utilizá-los.

Ex.: Teorema de Pitágoras aplicado a problemas com triângulo não retângulo.

Fórmula de equação do 2º Grau para  $x^3$   
 $-x^4 - x^2 - 3x = 0$

Como interpretar tais dificuldades?

Para Cauzinille-Marmèche e Weil-Barais (idem) os alunos dispõem de ilhas de conhecimento não interligadas. São conhecimentos autônomos, procedimentos e estratégias não relacionadas aos conceitos que lhes dão sentido e a sistemas simbólicos isolados de sua significação. Parecem ocorrer rupturas contínuas entre os conhecimentos do aluno, conduzindo-o forçosamente a representações não articuladas entre si.

Os alunos não têm os meta-conhecimentos suficientes para orientar os processos de resolução, selecionar as estratégias adaptadas e controlar os resultados. Eles raciocinam de forma truncada, deixando-se guiar pelos dados ou por intuição.

Tais considerações podem ainda ser exemplificadas pela maneira como alunos de 5ª série resolveram algumas expressões numéricas, envolvendo números inteiros (Teixeira, 1992). As expressões propostas foram:

$$1^\circ) (-10) + (-15);$$

$$2^\circ) (-20) + (+15);$$

$$3^\circ) (+12) - (+5);$$

$$4^\circ) (+12) + (-5);$$

$$5^\circ) (-25) + (+10);$$

$$6^\circ) (-25) - (-10);$$

A resolução das expressões revelaram que os acertos foram maiores nos casos em que o sinal coincidia com a operação a ser efetuada, como nos casos das expressões de número 1 e 3; nos outros casos, como a notação simbólica é ambígua (adição algébrica), os erros foram maiores, já que os alunos executavam a operação conforme indicado literalmente pelo sinal da operação e interpretando os números das parcelas como naturais. Mesmo nos casos de acertos, houve muitos erros no sinal do resultado, devido ao uso indiferenciado das regras da adição e da multiplicação.

### III - A ORIGEM DO ERRO SEGUNDO DIFERENTES CONCEPÇÕES

#### III-1 - Abordagem behaviorista

Na abordagem comportamental, pode-se dizer, resumidamente e de forma simplificada, que o erro ocorre devido à ausência de condicionamento adequado ou de reforçamento, para que um estímulo discriminativo produza uma resposta específica.

Nessa perspectiva, o erro é visto como fracasso ou insucesso e produz no comportamento efeitos de punição. Portanto, deve ser evitado, como propõe o método da Instrução Programada, criado por Skinner (1972).

Na pedagogia de base empirista, como o erro é algo a ser evitado, ele não tem função pedagógica. Portanto, ele é aparentemente coibido na situação pedagógica e, em si mesmo, ignorado pelo professor. Frente aos erros dos alunos, como não há respaldo para uma análise dos processos geradores intrínsecos, preconiza-se apenas um reforçamento dos procedimentos corretos envolvidos, no intuito de fazer aprender por repetição.

#### III-2 - Abordagem piagetiana

No processo de construção das estruturas lógicas, os erros, segundo Piaget (1976), são produzidos como resultado dos conflitos cognitivos que os sujeitos vivem no esforço para se adaptarem a novas situações.

Conflito cognitivo para Piaget é o termo usado para explicar o processo através do qual ocorrem mudanças cognitivas, ou seja, passagem de um estado de equilíbrio a outro, (teoria da equilibração), através de um período de transição em que há formas

contraditórias de interpretar e resolver um mesmo problema. O conflito se supera quando, por um processo de regulação interna, há uma reorganização e coordenação das ações em jogo.

Inhelder, Sinclair, Bovet (1977), nos seus estudos sobre aprendizagem, apontam os erros como indicadores dos níveis de construção do sujeito, devendo ser vistos como manifestação das coordenações pouco integradas. As soluções parciais a que as crianças chegam - explicitadas como erro - revelam na verdade, esforços de conciliação entre esquemas.

Nos estudos sobre os processos de descoberta, Inhelder et al (1987), Karmiloff-Smith & Inhelder (1978), identificam nos procedimentos da criança, ao resolver problemas, teorias implícitas ou "teorias em ação". Tais teorias, na medida em que orientam a ação, conduzem muitas vezes a erros, que se caracterizam por uma certa regularidade descoberta pela criança e generalizada indevidamente. O erro, nessa perspectiva, não é apenas o indício de uma dificuldade, mas sobretudo, indicador de uma lógica infantil ou "teoria em ação", que orienta as estratégias de ação com vistas à obtenção do êxito.

Moreno & Sastre (1983), ao proporem o conceito de aprendizagem operatória, vêem também os erros como necessários, pois para que as aprendizagens sejam generalizáveis, portanto construídas, é preciso que as "teorias" sejam explicitadas, o que torna os erros como passos intrínsecos ao processo de construção. Nesse enfoque, os erros são resultados de sucessivas concentrações em pontos de vistas particulares, as quais impedem considerações simultâneas. Por outro lado, as concentrações são resultados do descobrimento de uma nova forma de assimilar e resolver um problema e em si mesma, muitas vezes, representa a superação de uma concentração anterior. Resolver um problema compreensivamente, de forma estável, supõe, ao longo do tempo, contraposição entre as diferentes formas de considerá-lo. O erro permite o crescimento, na medida em que, a simultaneidade das contraposições produz contradições que levam a novas integrações. Em outras palavras, a consciência do erro oportuniza a reorganização das variáveis em jogo, num sistema interno explicativo mais amplo.

#### III-3 - Abordagem de G. Brousseau

A noção de obstáculo proposta, por Bachelard (1975) "A formação do espírito científico", foi usada como forma de explicar as dificuldades de avanços e causas de estagnação e mesmo recuo da ciência. Nessa abordagem, ele não se refere a obstáculos externos, mas às condições psicológicas implícitas ao ato de

conhecer: ele é limitado, inicialmente confuso e lento.

O obstáculo, nesta perspectiva, tem um caráter inevitável, faz parte do conhecimento como tal, revela a sedimentação de um conhecimento e se constitui em resistência à mudança. Bachelard, denomina esse obstáculo de epistemológico e descreve alguns desses obstáculos encontrados ao longo da história da produção do conhecimento das ciências físicas, tais como: o senso comum, a opinião, o realismo das observações, a tendência a explicar o fenômeno por uma causa única, etc...

Com base nesta análise, Brousseau (1983), utiliza a idéia de obstáculo, ampliando-a para interpretar questões da didática da matemática. O autor aponta três tipos de obstáculos: epistemológicos, didáticos e ontogenéticos.

a) os obstáculos epistemológicos se encontram tanto no desenvolvimento histórico dos conceitos, como se repetem nos conceitos espontâneos dos alunos. São concepções constitutivas do conhecimento e inerentes a um sistema de conhecimentos. Assim, todo conhecimento é suscetível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos, na medida em que quanto mais sedimentado, maior resistência oferecerá à ampliação do conhecimento.

Os obstáculos não podem ser confundidos, portanto, com meras dificuldades. Brousseau aponta algumas condições que permitem identificar os obstáculos epistemológicos:

- é conhecimento e não ausência de conhecimento;

- *o conhecimento-obstáculo tem um domínio de validade, ou seja, é eficaz para certos contextos mas para outros conduz a erros;*

- resistente ao estabelecimento de novo conceito ou ampliação do mesmo;

- resiste às contradições com os quais é confrontado.

b) Obstáculos de origem didática: são aqueles que "parecem depender apenas da escolha de um projeto do sistema educativo", ou seja, concepções de ensino que redundam numa transposição didática.

c) Obstáculos de origem ontogenética - são os provenientes das limitações do sujeito num dado momento do seu desenvolvimento mental.

Frente a estas colocações, Brousseau afirma que o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso... mas o efeito de um conhecimento anterior que num contexto era adaptado, mas que em outro se revela falso ou simplesmente inadaptado. Podemos citar, como exemplo, a redução aos naturais das operações no conjunto Z e R, ou, ainda, a dificuldade de entender nos inteiros, a operação de adição como associação e não como acréscimo.

Acrescenta ainda que os erros, em um mesmo sujeito, comparecem ligados entre si por uma fonte comum: um conhecimento antigo que foi eficiente em certas situações. Por isso mesmo são resistentes e vão ressurgir várias vezes, mesmo depois do sujeito ter rejeitado o modelo errado.

#### III.4 - A teoria dos campos conceituais de G. Vergnaud

Segundo Brun(1994), Vergnaud é um dos primeiros psicólogos a se preocupar com a questão dos conteúdos de ensino no âmbito de uma psicologia do desenvolvimento cognitivo. Nesse sentido, pretende estabelecer uma psicologia dos conceitos.

Os conceitos, para esse autor (1990), são descritos como compostos por um tripé de três conjuntos:

- conjunto de situações de referência ou do real que dão sentido ao conceito. O significado dos conceitos advém da variedade de situações comuns de problemas ao qual o conceito se aplica. As situações indicam o sentido da aprendizagem, ou seja, implicam um para quê e quando. A ação em situação é a fonte da formação dos conceitos.

- conjunto de invariantes operatórios que são constitutivos do conceito. Para cada classe de situações, há operações de pensamento que se baseiam no reconhecimento de invariantes relativos à extração de uma propriedade, a regras de ação, a inferências, predições, ou mesmo aplicação de um verdadeiro teorema, mesmo não necessariamente explícito.

Ex.: a cardinalização do número supõe um teorema em ação.

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$  desde que  $A \cap B = \emptyset$ .

- Conjunto de Significantes ou de representações simbólicas que podem ser de várias ordens: linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, álgebra, referentes não só à representação dos problemas como às soluções.

Na abordagem de Vergnaud, não comparece

a idéia de obstáculo, no sentido da sua produção histórica. A preocupação do autor é de caráter psicológico e restrito ao campo cognitivo.

As dificuldades dos alunos, que podem ser expressas na produção de erros, advêm do fato de que os conhecimentos postos em ação não resolvem os problemas, dado que os esquemas que os organizam não estão suficientemente coordenados ou completos. Em outras palavras, identifica obstáculos como resultado das contradições entre a ação a ser executada (por exemplo, uma operação aritmética ou algébrica) e aquela apontada pelo funcionamento do esquema. Esse fato pode ser detectado não só através do que o aluno diz, como também do que ele faz, o que revela de fato que, a base do conhecimento está nos esquemas de ação e não nas declarações do sujeito.

O esquema de ação para Vergnaud, é definido como organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas. Ex.: esquema de enumeração supõe o princípio de exaustividade, exclusividade e cardinalidade associado ao funcionamento da linguagem. Por outro lado, a formação do esquema só é possível a partir de situações vividas e representadas.

O erro, portanto, como manifestação da falta de coordenação entre esquemas, pode advir de dificuldades em qualquer dos conjuntos necessários à formação do conceito: seja das situações, dos invariantes construídos ou das representações simbólicas.

## **CONCLUSÕES**

Com base nos elementos levantados podemos dizer que, a abordagem do erro, nos permite inferir o modelo pedagógico que embasa o trabalho do professor.

Numa pedagogia tradicional, o erro é uma produção parasita, testemunha de um erro de aprendizagem (Cauzinille-Marmèche & Weil-Barais, 1989), não está integrado num esquema de construção do saber. A forma de corrigi-lo se resume em repetir os enunciados corretos relativos ao tema, o que não desenvolve uma atitude reflexiva por parte do aluno, mas o condiciona a emitir certas respostas.

Por outro lado, o erro pode ter um papel importante se o usarmos como motor da ação e da reflexão (Brousseau, 1983) em situações apropriadas. Tais situações são descritas, pelo autor, como capazes de fazer o aluno evoluir, não apenas porque recebeu

mais informações, mas porque pode reestruturar e integrar seus conhecimentos anteriores com as necessidades de expansão dos mesmos. Nesse sentido, como afirma Perrin-Glorian (1995, p.81), *"a noção de obstáculo é também um meio de olhar de outro modo os erros do aluno: certos erros recorrentes são resultado de conceitos que, mesmo quando são falsos, não são acidentais mas aquisições muitas vezes positivas"*.

As recentes abordagens cognitivas sobre o erro, passaram a encará-lo como integrante do processo de aprendizagem. Isto não significa estabelecer uma pedagogia do erro, mas uma pedagogia que assuma a presença de obstáculos na construção do conhecimento, como parte do processo. Conhecê-los e criar estratégias visando auxiliar os alunos a superá-los, deve ser uma preocupação incluída no planejamento do professor.

O professor precisa analisar os erros dos alunos e distingui-los: erros casuísticos, resultado de distrações, não podem ser vistos como erros sistemáticos. Esses podem ser interessantes porque são reveladores de modelos implícitos errôneos, de obstáculos de diferentes origens ou de problemas advindos de dificuldades ligadas à formação do conceito.

Tanto num caso como no outro, não será possível pensar em suprimi-los, simplesmente, dado que pela sua natureza são constitutivos do conhecimento. Tal constatação nos remete à única forma de trabalhá-lo, que é através de uma intervenção didática instrumentalizada por esses elementos.

Cauzinille-Marmèche e W. Barais (idem) sugerem que, para favorecer os processos de apropriação dos conceitos científicos pelos alunos, pode-se ater a dois aspectos do conhecimento:

o desenvolvimento de atividades meta-cognitivas através de incentivo - generalização e abstração, estimulando o aluno a procurar regularidades, a destacar elementos-chave da estrutura dos problemas, refletir sobre a finalidade das estratégias usadas e seus limites.

explicitar a natureza da situação-problema ajudando o aluno a estabelecer melhor o domínio de validade de seus conhecimentos, levando-os a perceberem - em quais situações tal conceito é útil, qual é o limite de validade daquele modelo, etc...

A utilização dessas possíveis pistas de intervenção, pode levar a aprendizagem a ser concebida como uma atividade de estabelecer relações e generalizações e não como um simples empilhamento de conhecimentos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACHELARD, G. La formation de l'esprit scientifique. Paris, Livrarie Philosophique J. Vrin, 1975
- BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, n. 4. 2, 165-98, 1983
- BRUN, J. Évolution des rapports entre la Psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In ARTIGUE, M. et al (eds.). "Vingt ans de didactique des mathématiques en France". Hommage a Guy Brousseau et Gerard Vergnaud, La Pensée, Paris: Sauvage, 1994
- CAUZINILLE-MARMÈCHE, E., WEIL-BARAIS, A. Quelques causes possibles d'échec en mathématiques et en sciences physiques. Psychologie Française, n. 34-4, p.277-83, 1989
- CORTÉS, A. Modélisation cognitiviste: invariants opératoires dans la résolution des équations, in Artigue, M. et alii (eds.). "Vingt ans de didactique des mathématiques en France". Hommage a Guy Brousseau et Gerard Vergnaud, La Pensée, Paris: Sauvage, 1992
- INHELDER, B. Ackerman et al. Das estruturas cognitivas aos procedimentos de descoberta. In: LEITE, L. B. (Org.) Piaget e a escola de Genebra, São Paulo: Cortez., 1987
- INHELDER, B., SINCLAIR, H., BOVET, M. Aprendizagem e estrutura do conhecimento, São Paulo: Saraiva, 1974
- KARMILOFF-SMITH, INHELDER, B. Si quieres avanzar, hazte con una teoría. Infancia y aprendizaje, n. 13, p. 69-88, 1980
- MORENO, M & SASTRE, G. Aprendizaje y desarrollo intelectual. México: Gedisa, 1983
- PERRIN-GLORIAN, M. J. Utilização da noção de obstáculo na didática da matemática, CEMA. Caderno de Educação Matemática n.2, p.78-104, 1995.
- PIAGET, J. Cognitive development in children - development and learning. Journal of Research in Science Teaching, n. 2, p.176-86, 1964
- PIAGET, J. A equilibração das estruturas cognitivas, Rio de Janeiro: Zahar, 1976
- SKINNER, B. F. Tecnologia de ensino. São Paulo, Herder, 1972
- TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem escolar de números inteiros: análise do processo na perspectiva construtivista piagetiana. São Paulo, 1992. Tese (Doutorado) - Instituto de Psicologia, USP.
- VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.10, n. 2. 3, p133-70, 1990
- VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Psychologie Française, v.30, n. 3/4, p.245-52. 1989